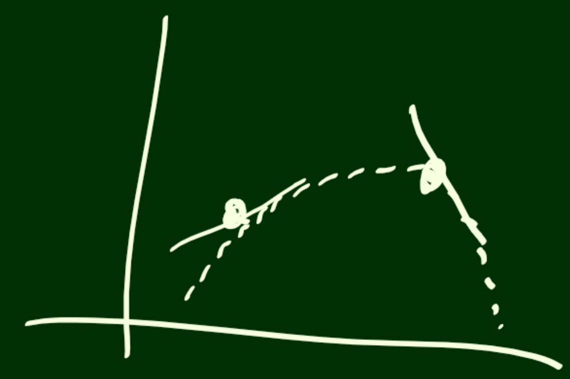
Open problém: Lebesgueovy konstanty - Erdős - uzly pro kořeny OG polynomů s váhou w, pak $\int_{-1}^{1} (f-L_n)^2 w \, dx \to 0$.

- Extrapolace: interpoluji na $[a,b]$, chci odhad $f(x) \approx L_n(x)$, $x \notin [x_0, \dots, x_n]$. Chyba roste velmi rychle do nekonečna. Čebyševův polynom je nejrychleji rostoucí monický polynom mimo $[-1,1]$.

- Hermiteova interpolace: Chci p polynom: $p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, \alpha_i$.

  $\exists! \, p$, odhad chyby, $\alpha_i = 1$, Explicitní konstrukce.



Interpolace - Spline funkce : Lagrange $\to$ 1 globální funkce na $[a,b]$.

$\forall x$ je $L_n(x)$ hodně operací.

- Jiný přístup: dělení, po částech polynom.

Lineární interpolační spline: Dáno $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ekvidistantní uzly

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_{i+1} - x_i = h \;\; \forall i. \quad I_i = [x_i, x_{i+1}]$$

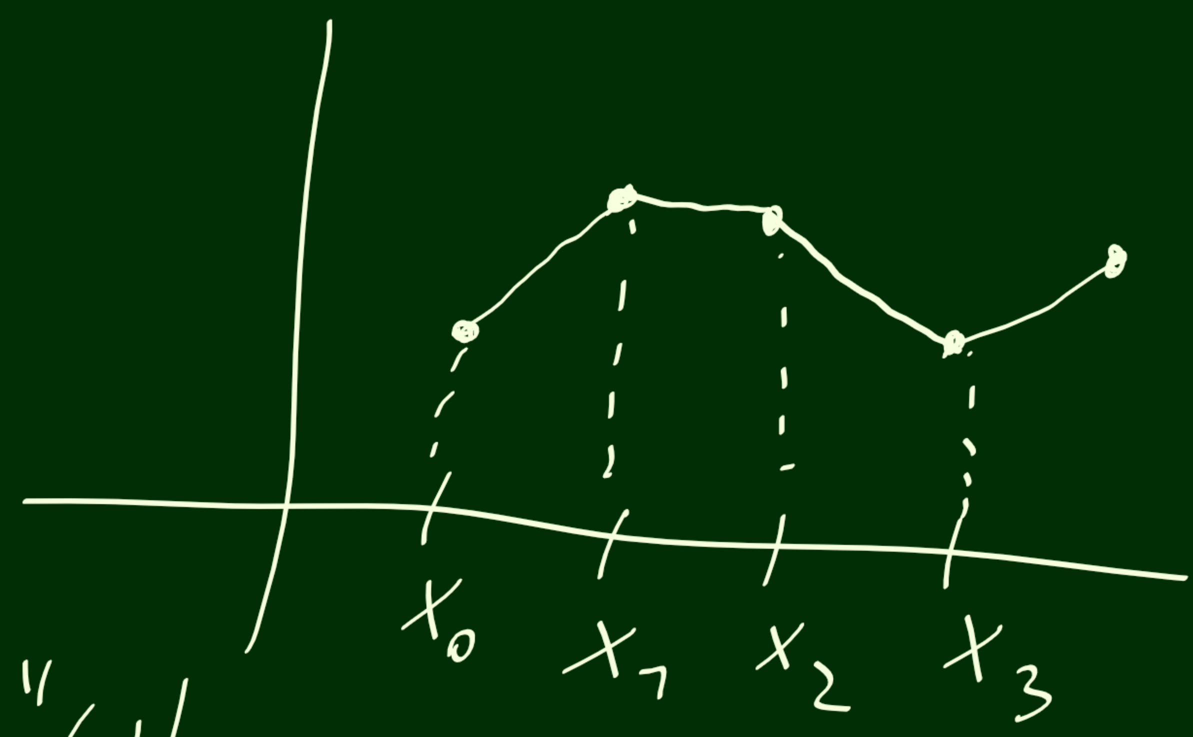
Hledám funkci S_L: 1) $S_L \in C[a,b]$

2) $S_L|_{I_i}$ je lin. funkce $\forall i = 0,\dots,n-1$.

3) $S_L(x_i) = f_i \; (= f(x_i)) \quad \forall i = 0,\dots,n$.

Na I_i je $S_L = L_1$ = Lagrangeův lin. interp.

$$S_L(x)\Big|_{I_i} = \frac{x_{i+1}-x}{h} f_i + \frac{x-x_i}{h} f_{i+1}.$$



Věta (odhad chyby): Nechť $f \in C^2[a,b]$, pak

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - S_L(x)| \le \frac{1}{8} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Dk: Odhad chyby L_1 na I_i: $x \in I_i \Rightarrow f(x) - S_L(x) = \frac{1}{2} \underbrace{f''(\xi)}_{|\cdot|\le \max|f''|} \underbrace{(x-x_i)(x-x_{i+1})}_{|\cdot| \le \frac{h^2}{4}}$

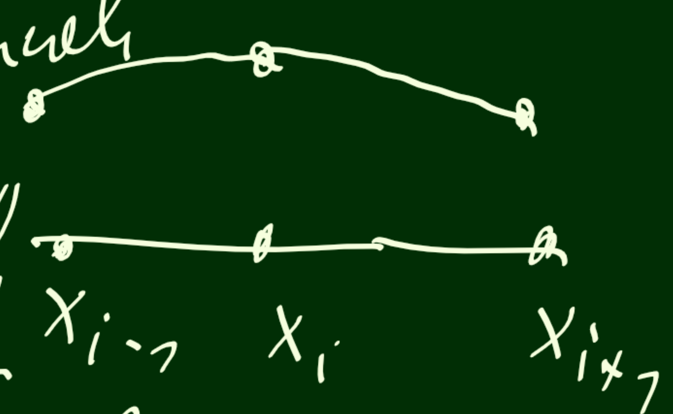
Kubický interpolační spline: vyšší hladkost

Hledám S: 1) $S \in C^2[a,b]$

2) $S|_{I_i}$ je kubická fce $\in P_3 \quad \forall i = 0,\dots,n-1$.

3) $S(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0,\dots,n$.

- Vyhovuje to? $S|_{I_i} = 4$ neznámé, n intervalů $\Rightarrow$ $\boxed{4n \text{ neznámých.}}$
  - $S|_{I_i}(x_i) = f_i$, $S|_{I_i}(x_{i+1}) = f_{i+1}$ $\Rightarrow$ $2n$ podmínek
  - $S'(x_i-) = S'(x_i+)$, $i = 1,\dots,n-1$ $\Rightarrow$ $n-1$ podmínek
  - $S''(x_i-) = S''(x_i+)$, $i = 1,\dots,n-1$ $\Rightarrow$ $n-1$ podmínek



$\boxed{4n-2 \text{ podmínek}}$

• Doplním 2 okrajové podmínky: • $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$

• $s''(a) = f''(a)$, $s''(b) = f''(b)$ – My

• $s''(a) = s''(b) = 0$ – přirozený kubický spline

- Spline – konstrukce lodí.

lať pro malé ohyby zaujme tvar kubického splinu.

hřebíky

Konstrukce: už nelze $\forall I_i$ zvlášť.

Def: $M_i := S''(x_i)$ – momenty splinu.

Lemma (soustava lin. rovnic pro M_i): Pro $i = 1, \dots, n-1$ platí:

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right)$$

Navíc: $M_0 = f''(a)\ (=0)$, $M_n = f''(b)\ (=0)$

Dk: Taylor pro S:
$$\underbrace{S(x_{i+1})}_{f_{i+1}} = \underbrace{S(x_i)}_{f_i} + S'(x_i)h + \underbrace{S''(x_i)}_{M_i}\cdot\frac{h^2}{2} + \underbrace{S'''(x_i+)}_{\text{konst. na } I_i}\frac{h^3}{6}$$

obdobně
$$\underbrace{S(x_{i-1})}_{f_{i-1}} = \underbrace{S(x_i)}_{f_i} - S'(x_i)h + \underbrace{S''(x_i)}_{M_i}\frac{h^2}{2} - S'''(x_i-)\frac{h^3}{6}$$
$+$

$$\Rightarrow f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + M_i h^2 + \Big(\underbrace{S'''(x_i+) - S'''(x_i-)}_{(*) = ?}\Big)\frac{h^3}{6}$$

Taylor pro S'':
$$\underbrace{S''(x_{i+1})}_{M_{i+1}} = \underbrace{S''(x_i)}_{M_i} + S'''(x_i+)h$$
$$\underbrace{S''(x_{i-1})}_{M_{i-1}} = \underbrace{S''(x_i)}_{M_i} - S'''(x_i-)h$$
$+,\ \frac{1}{h}$

$$\Rightarrow (*) = \frac{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}}{h}$$

dosadím

Soustava rovnic pro $\{M_i\}_{i=1}^{n-1}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2}\begin{pmatrix} g_1 - f''(x_0) \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-1} - f''(x_n) \end{pmatrix}$$

$g_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$.

Lemma A je ostře diag. dom. $\Rightarrow$ regulární $\Rightarrow \exists!\, S$.

Konstrukce $S|_{I_i}$: Na I_i hledám $S \in P_3$: $S(x_i)=f_i$, $S(x_{i+1})=f_{i+1}$,
$S''(x_i)=M_i$, $S''(x_{i+1})=M_{i+1}$

S'' lin. Lagrange $\Rightarrow$ $S''(x) = \frac{x-x_i}{h_i}M_{i+1} + \frac{x_{i+1}-x}{h_i}M_i \quad / \int dx$

$$S'(x) = \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1} \quad \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}M_i + A_i \quad / \int dx$$

$$\boxed{S(x) = \frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1} + \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i + A_i(x-x_i) + B_i}$$

- $S(x_i)=f_i \overset{x=x_i}{\Rightarrow}$ $f_i = \frac{h_i^2}{6}M_i + B_i \Rightarrow \boxed{B_i = f_i - \frac{h_i^2}{6}M_i}$
- $S(x_{i+1}) = f_{i+1} \Rightarrow f_{i+1} = \frac{h_i^2}{6}M_{i+1} + A_i h_i + B_i$

$$\Rightarrow \boxed{A_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)}$$

Konvergence, odhady chyby: obecně nerovnoměrné dělení

Věta: Nechť $f \in C^4[a,b]$. Pak $\exists C_0, C_1, C_2$ nez. na f, $\{x_i\}_{i=0}^n$:

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(j)}(x) - S^{(j)}(x)| \le C_j \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \cdot h^{4-j}, \quad j=0,1,2.$$

$C_0 = \frac{5}{384}$, $C_1 = \frac{1}{24}$, $C_2 = \frac{3}{8}$.

Pozn. Pro $f \in C^2$: $\max|f-S| \le C h^2 \max|f''|$

Věta: $\{D_n\}$ - posloupnost dělení, $\exists K$: $\frac{\max h_i}{\min h_i} \le K$. Pak $\forall f \in C[a,b]$:
$S_n \rightrightarrows f$, kde S_n = přirozený kubický spline na D_n.

Pozn: S zachovává kvalitativní vlastnosti f: f konvexní, h dost malé $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ S konvexní

f rostoucí $\Rightarrow$ S rostoucí.

Kvadratické: